CAPÍTULO 2(3) – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

3.1. Variável aleatória

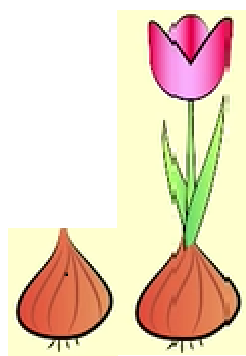
Uma variável aleatória é o resultado de uma experiência aleatória que se se pode medir ou contar.

São v.a.(s):

Peso de uma mala

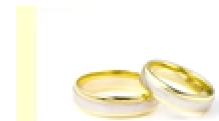
Nº chamadas de emergência

Tempo que bombeiros levam a chegar ao incêndio

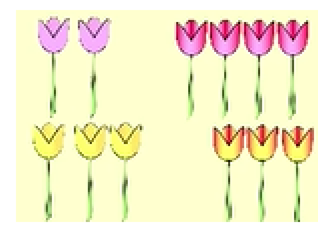


Nº bolbos que florescem

Não são v.a.(s):



Casamento



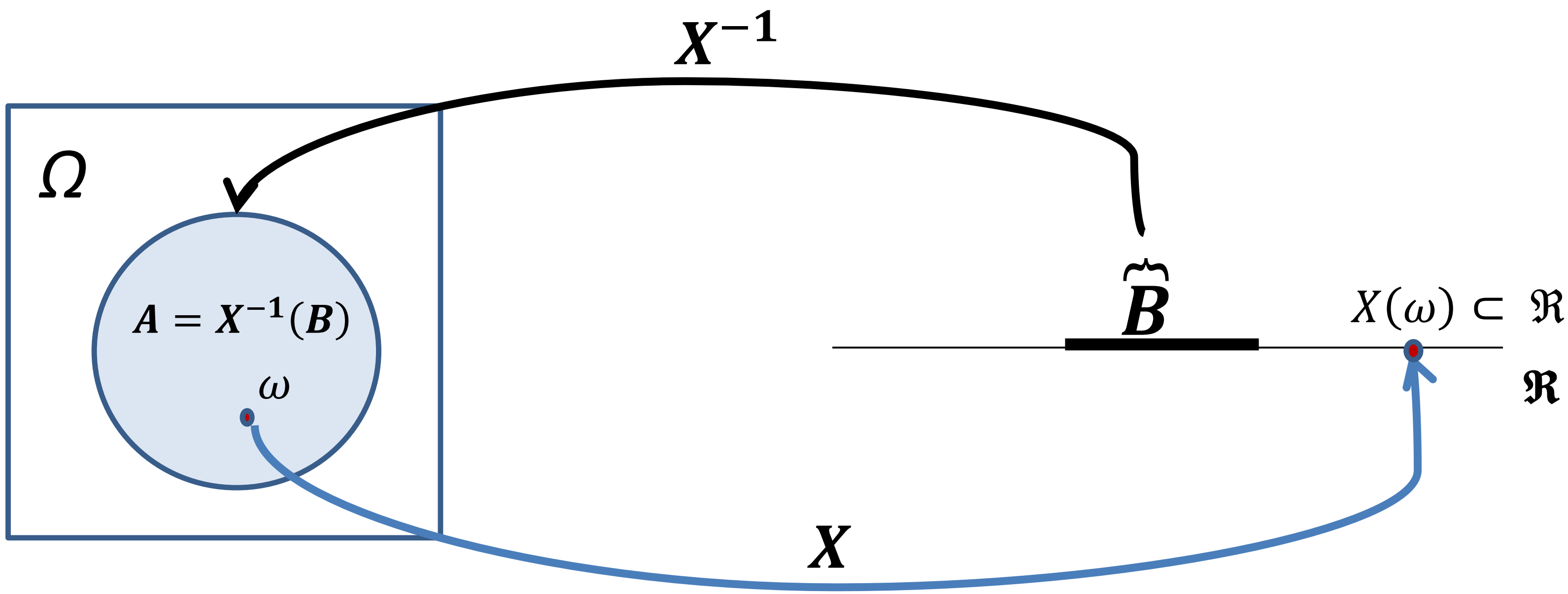
Cor das tulipas

CAPÍTULO 2(3) – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

Example of a random variable

CAPÍTULO 2(3) – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

- Ao conjunto $B \subset \Re$ *chama-se* ***imagem de A***, $\boldsymbol{X(A) = B}$***; ao conjunto*** $\boldsymbol{A}$ ***chama-se*** **imagem inversa de** $\boldsymbol{B}$**,** $\boldsymbol{A = X^{-1}(B) \subset \Omega}$



$$P_X(B) = P_X[X^{-1}(B)] = P(A)$$

onde $A = \{\omega : X(\omega) \in \boldsymbol{B}\}$.

CAPÍTULO 2(3) – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

3.1. Variável aleatória

- Condensação e simplificação da informação

Definição 3.1 – Variável aleatória

Uma variável aleatória, X, *é uma função com domínio* $\boldsymbol{\Omega}$ *e com contradomínio em* $\Re$.

Assim, $X : \omega \in \boldsymbol{\Omega} \rightarrow X(\omega) \in \Re$ *(3.1)*

Exemplo 3.1 – Quando se lançam dois dados e se regista a soma de pontos obtida (v.a.)

Em termos formais:

$$\boldsymbol{\Omega} = \{(i,j) : i,j = 1,2,3,4,5,6\} \; e \; X[(i,j)] = i + j \in \Re$$

CAPÍTULO 2(3) – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

Comentários:

- A função X *(variável aleatória) faz corresponder a cada* $\omega \in \Omega$ *um e só um* $X(\omega) \in \Re$*;*

- **Convenção importante:**

A variável aleatória - X (letra maiúscula)

Valores particulares que a variável assume -x (letra minúscula)

- Definida a variável aleatória, considera-se:

$\Re$ novo espaço de resultados

subconjuntos $B \subset \Re$ *acontecimentos.*

CAPÍTULO 2(3) – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

- **Exemplo 3.1 – Quando se lançam dois dados e se define a v.a.** $\boldsymbol{X = soma\ de\ pontos\ obtida}$ $\Omega = \{(i, j) : i, j = 1,2,3,4,5,6\}$ e $X\,[(i, j)] = i + j$

Imagens	Imagens inversas	Probab.
{2}	{(1,1)}	1/36
{3}	{(1,2),(2,1)}	2/36
{4}	{(1,3),(2,2),(3,1)}	3/36
{5}	{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)}	4/36
{6}	{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)}	5/36
{7}	{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)}	6/36
{8}	{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)}	5/36
{9}	{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)}	4/36
{10}	{(4,6),(5,5),(6,4)}	3/36
{11}	{(5,6),(6,5)}	2/36
{12}	{(6,6)}	1/36

CAPÍTULO 2(3) – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

$$B = [3,5) \subset \Re \qquad \Rightarrow P(B) = P(3 \leq X < 5) = P[X^{-1}(B)]$$

$$= P\left[\underbrace{\{(1,2),(2,1),(1,3),(2,2),(3,1)\}}_{A = imagem\ inversa\ do\ intervalo\ B \subset \Re}\right]$$

$$= \frac{5}{36}$$

Se A é o acontecimento saída de uma soma de pontos superior a 10, $A = \{(5,6),(6,5),(6,6)\} \subset \Omega$

$$P(A) = P[X(A)] = P\left(\underbrace{X > 10}_{imagem\ de\ A \subset \Omega}\right) = \mathrm{P}(X = 11) + \mathrm{P}(X = 12)$$

$$= \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36}$$

- **3.2 Função de distribuição**

Definição 3.2 – Função de distribuição
A função real de variável real, F, *com domínio* $\Re$, *definida por,*

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X \in (-\infty, x])$$

designa-se por ***função de distribuição*** da variável aleatória X.

CAPÍTULO 2(3) – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

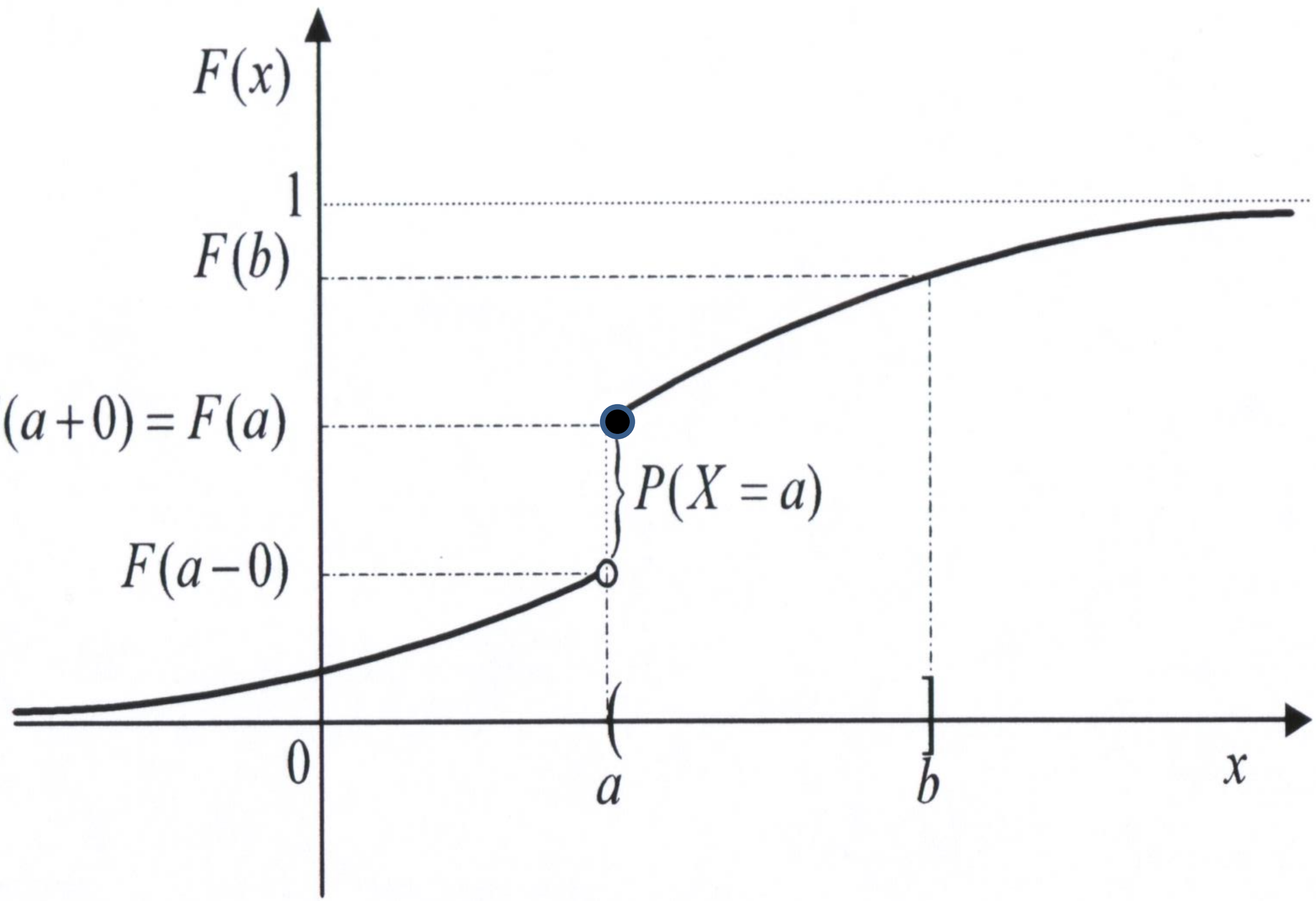


Fig. 3.3 – Propriedades da função de distribuição

- **Propriedades da função de distribuição:**

1) $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \leq \mathbf{1}$.

2) ***F é não decrescente***: $\Delta x > 0 \Rightarrow F(x) \leq F(x + \Delta x)$.

3) $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ *e* $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

4) $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$, quaisquer que sejam a *e* b *a verificar* $b > a$

5) ***F é contínua à direita***, $F(a + 0) = \lim\limits_{x \to a+0} F(x) = F(a)$

6) $P(X = a) = F(a) - F(a - 0)$ qualquer que seja a *um número real finito.*

CAPÍTULO 2(3) – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

Propriedades da função distribuição:

a) $P(X < b) = F(b - 0)$

b) $P(X > a) = 1 - F(a)$

c) $P(X \geq a) = 1 - F(a - 0)$

d) $P(a < X < b) = F(b - 0) - F(a)$

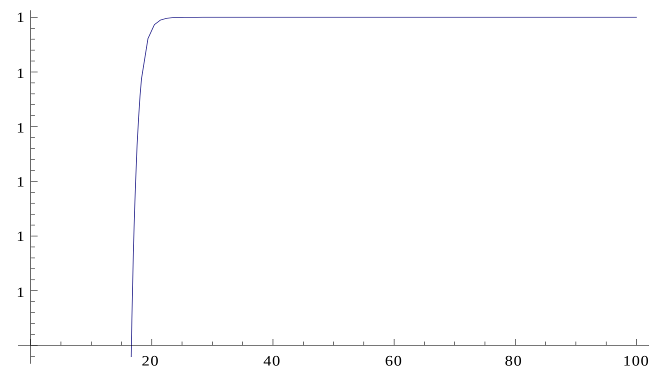
e) $P(a \leq X < b) = F(b - 0) - F(a - 0)$

f) $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a - 0)$

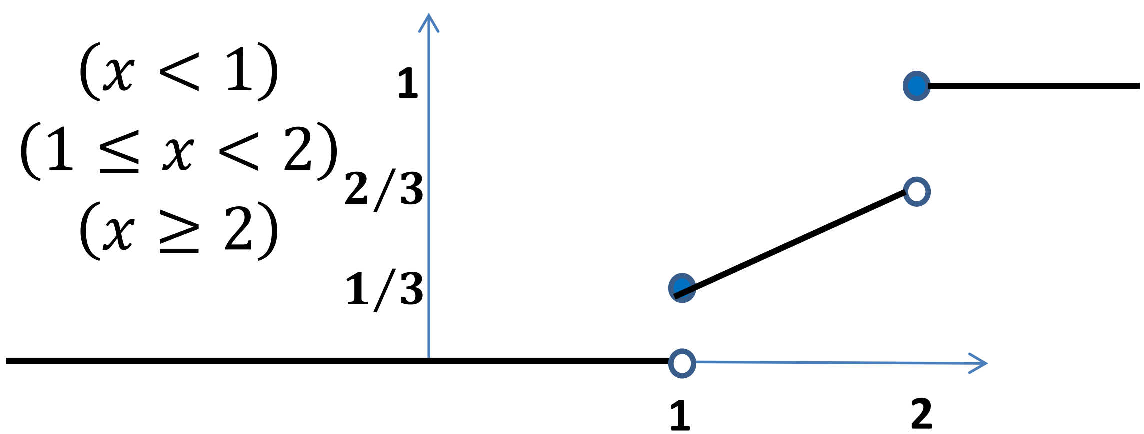
CAPÍTULO 2(3) – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

- **Exemplo 3.4 – Verificar se as seguintes funções definem uma função de distribuição:**

A) $F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 - e^{-x} & (x \geq 0) \end{cases}$

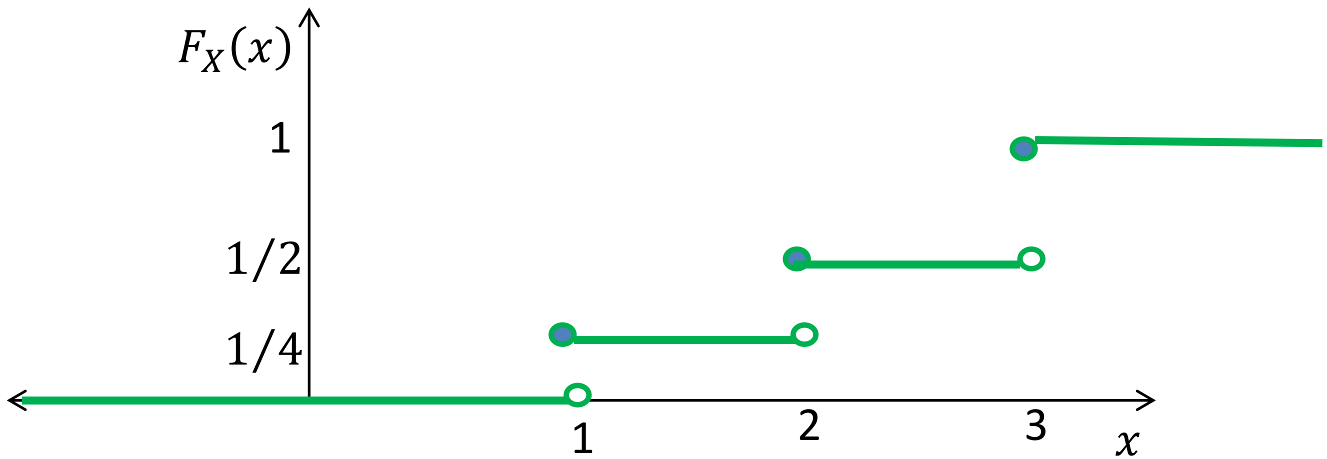


B) $F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 1) \\ x/3 & (1 \leq x < 2) \\ 1 & (x \geq 2) \end{cases}$



CAPÍTULO 2(3) – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

$$C)\ F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1/4 & 1 \leq x < 2 \\ 1/2 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$



CAPÍTULO 2(3) – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

- **3.3 Classificação de variáveis aleatórias**

Variáveis aleatórias podem ser classificadas como:

Discretas

Contínuas

Mistas

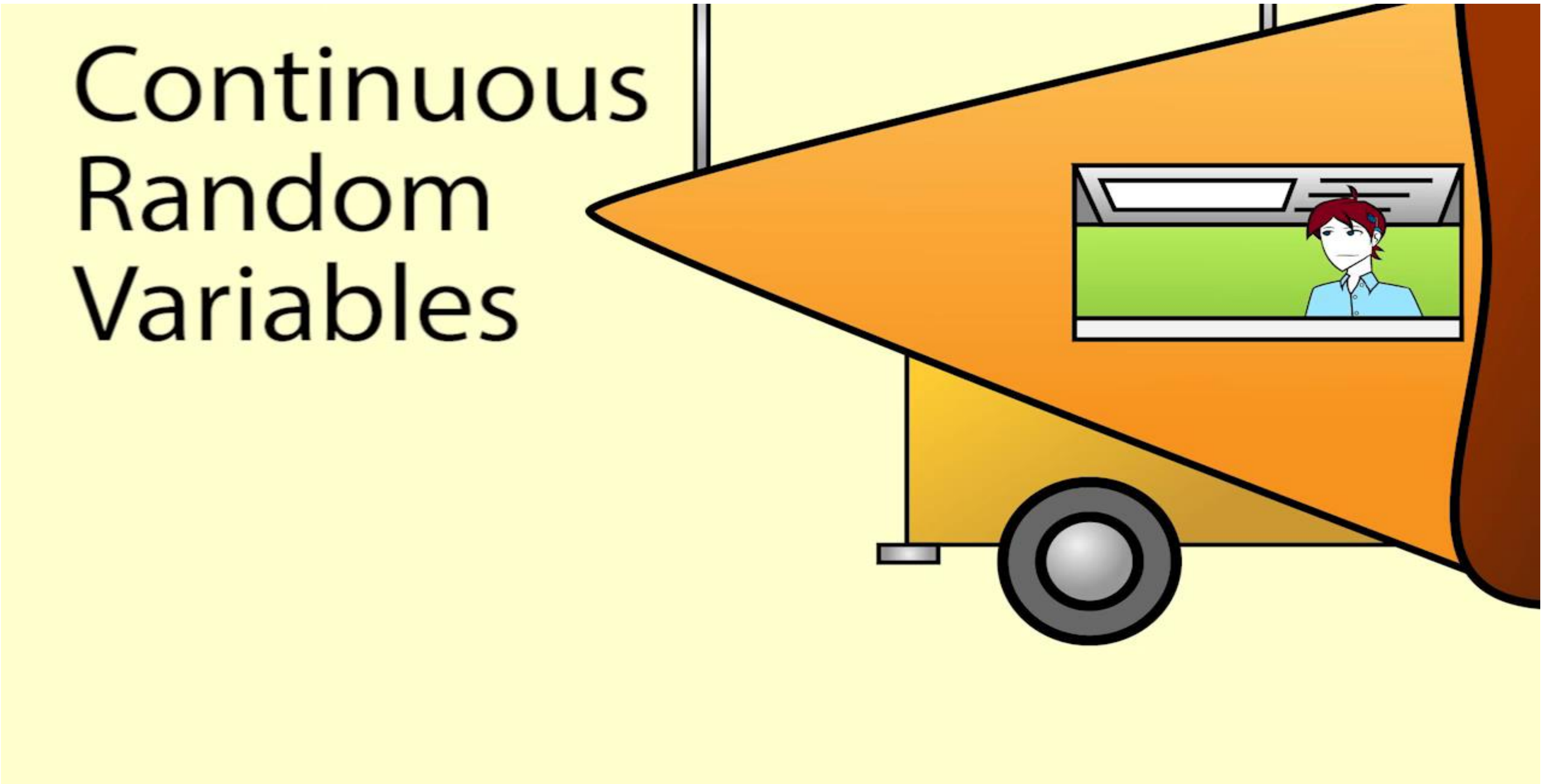
3.3 Classificação de variáveis aleatórias

Variáveis aleatórias Discretas

CAPÍTULO 2(3) – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

3.3 Classificação de variáveis aleatórias

Variáveis aleatórias Contínuas



• 3.3 Classificação de variáveis aleatórias

Conjunto dos pontos de descontinuidade da função distribuição.

$$\boldsymbol{D_X = \{x: P(X = x) = F(x) - F(x - 0) > 0\}}$$

Definição 3.3

. X é uma **variável aleatória discreta** se e só se:

$\boldsymbol{D_X} \neq \emptyset \qquad P(X\epsilon D) = \sum_{x\epsilon D} P(X = x) = 1 \qquad (3.5)$

. X é uma **variável aleatória contínua** se e só se:

$\boldsymbol{D_X} = \emptyset$ Existe uma função real de variável real, $f(x) \geq 0$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx, \quad \forall\, x \,\epsilon\, R \qquad (3.6)$$

. X é uma **variável aleatória mista** se

$\boldsymbol{D_X} \neq \emptyset \qquad P(X\epsilon D) = \sum_{x\epsilon D} P(X = x) < 1 \qquad (3.7)$

- **Comentários:**

  - Continuidade de $F_X(x)$ é condição necessária mas não suficiente para que X seja uma v.a. contínua;

  - $D = \emptyset$ e $P(X \epsilon D) < 1$
  são condições necessárias mas não suficientes para X ser v.a. mista;

  - V.A.(s) podem não ser discretas, não ser contínuas e não ser mistas (F_{X_2} não verificar a condição (3.6)).

CAPÍTULO 2(3) – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

- **Variável aleatória discreta**

Definição 3.4 – Função probabilidade

A função $f(x) = P(X = x)$ *chama-se função probabilidade da variável aleatória discreta* X *com domínio* D_X *sse,*

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x) > 0 & x \in D_X \\ 0 & x \notin D_X \end{cases}$$

$$P(X \in B) = P(B) = \sum_{x \in (B \cap D)} f(x) \qquad (B \subset \boldsymbol{D_X})$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) \qquad \forall\, x \in \Re$$

CAPÍTULO 2(3) – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

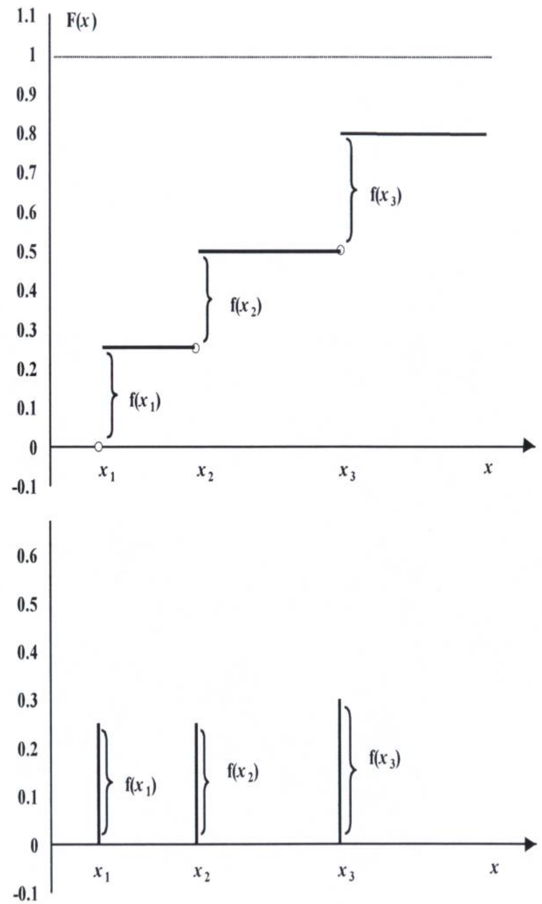


Fig. 3.4 – Função de distribuição e função probabilidade de uma v.a. discreta

CAPÍTULO 2(3) – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

- **Exemplo 3.5 – Seja a v.a. X*: número de faces obtido no lançamento de três moedas regulares.*** $X = 0, 1, 2, 3$. *Portanto:*

$x < 0$, *tem-se* $F(x) = 0$,

$0 \leq x < 1$, *tem-se* $F(x) = P(X \leq 0) = f(0) = (1/2)^3 = 0.125$,

$1 \leq x < 2$, *tem-se* $F(x) = P(X \leq 1) = f(0) + f(1) = (1/2)^3 + 3(1/2)^3 = 0{,}5$.

$2 \leq x < 3$, *tem-se* $F(x) = P(X \leq 2) = f(0) + f(1) + f(2) = (1/2)^3 + 3(1/2)^3 + 3(1/2)^3 = 0.875$,

$x \leq 3$, *tem-se* $F(x) = P(X \leq 3) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0{,}125 & 0 \leq x < 1 \\ 0{,}5 & 1 \leq x < 2 \\ 0{,}875 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

CAPÍTULO 2(3) – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

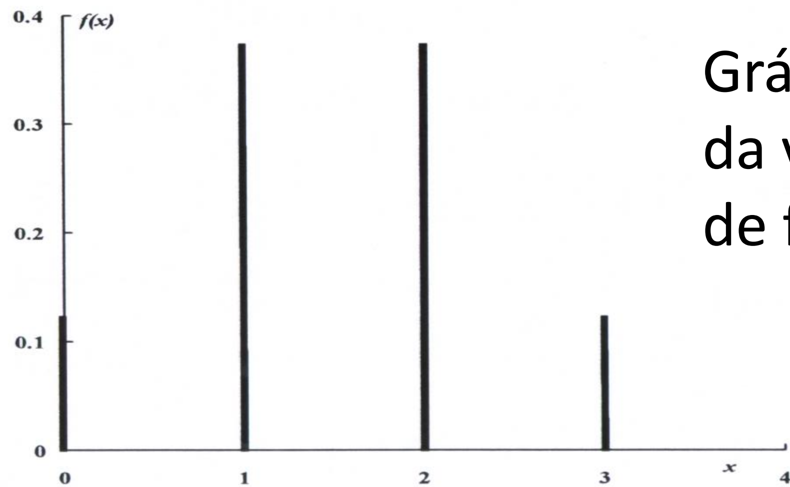
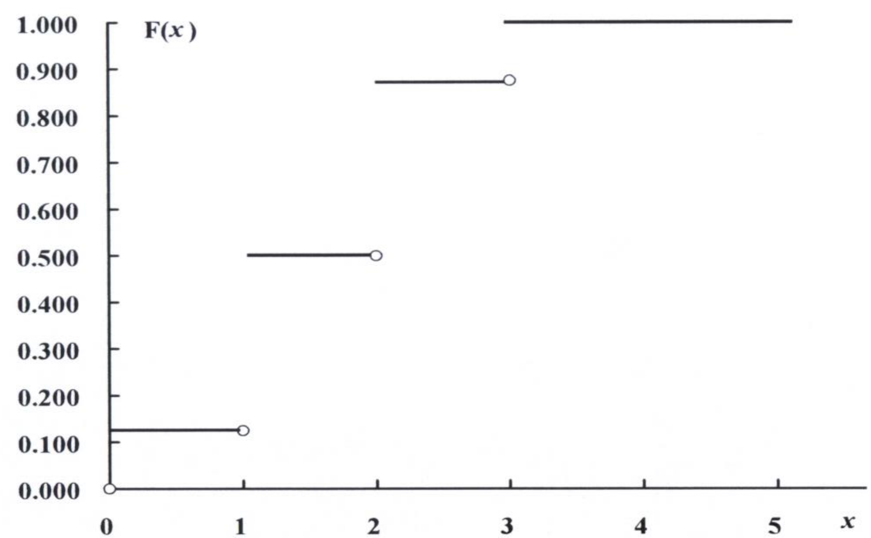


Gráfico da função probabilidade da v.a. que representa o número de faces obtido com 3 moedas

Gráfico
da função distribuição
da v.a. que representa o
número de faces obtido
com 3 moedas
[$F(x)$ tem um numero finito de
pontos de descontinuidade]



CAPÍTULO 2(3) – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

- **Exemplo 3.6 – Joga-se com um dado equilibrado. Seja X*: nº de lançamentos*** *que se fazem* ***até sair uma «sena».***

  Ω - infinidade numerável.

  $D = \{1, 2, \cdots, x, \cdots\} \in |\mathrm{N}$ *com probabilidades,*

$$P(X = 1) = 1/6; P(X = 2) = 5/6 \times 1/6\,; P(X = 3) = (5/6)^2 \times 1/6;\ \cdots$$

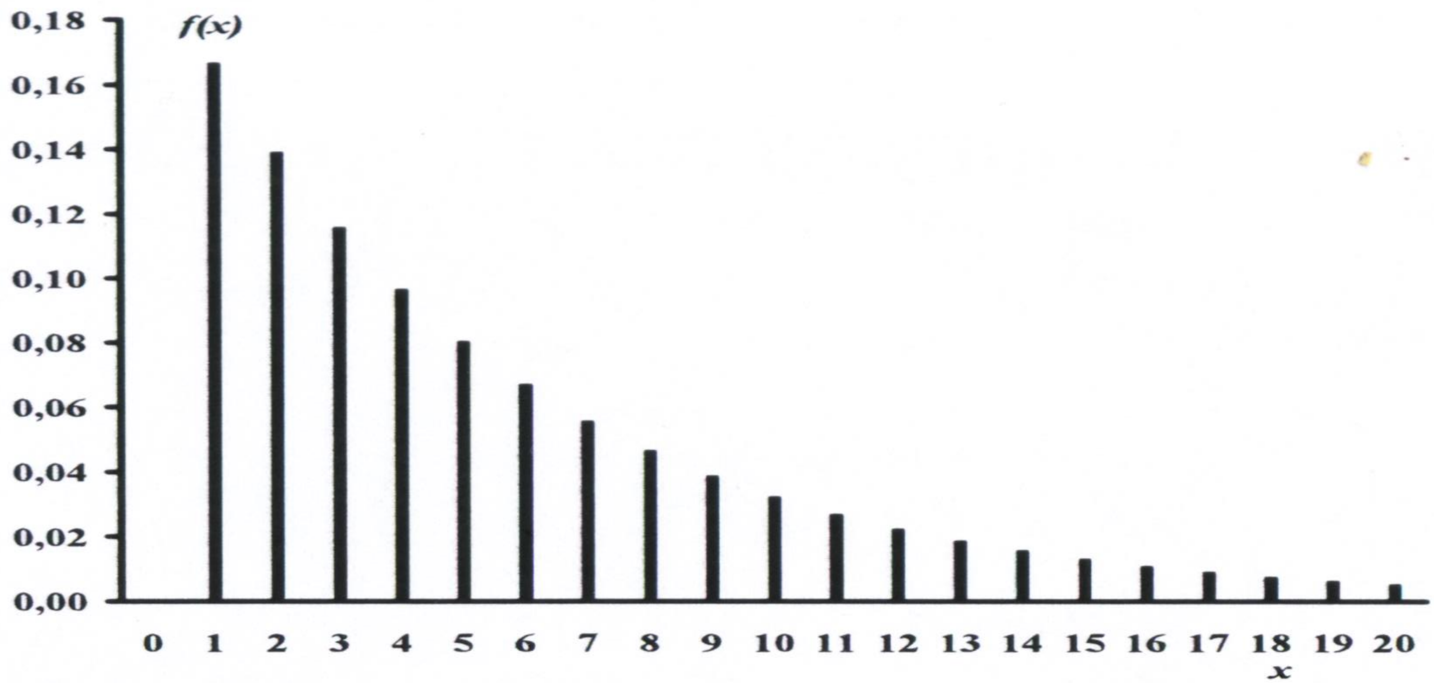
F. Probabilidade:

$$f(x) = P(X = x) = (5/6)^{x-1} \times 1/6 \qquad x = 1, 2, \cdots$$

F. Distribuição:

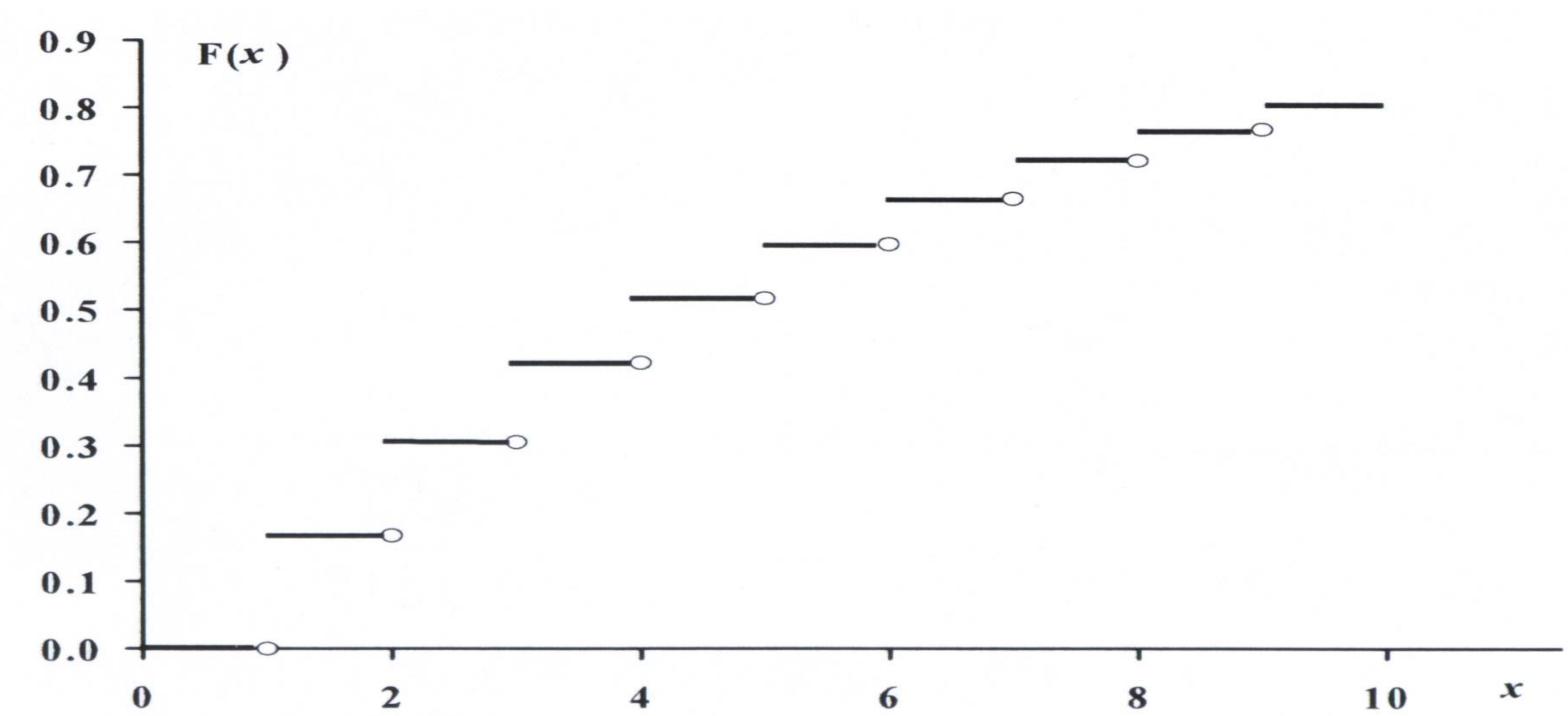
$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \sum_{i=1}^{x} (5/6)^{x-1} \times 1/6 & x = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

CAPÍTULO 2(3) – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO



Função Probabilidade do número de lançamentos até sair sena

CAPÍTULO 2(3) – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO



Função Distribuição do número de lançamentos até sair sena

$F(x)$ tem uma infinidade numerável de pontos de descontinuidade

CAPÍTULO 2(3) – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

Ex. O gerente de uma fábrica está a considerar substituir uma das suas máquinas. Registos passados mostram que o número de avarias da máquina por semana segue a seguinte distribuição:

Nº de avarias	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Probabilidade	0,1	0,26	0,42	0,16	0,06

a) Escreva a função distribuição da v.a. X que representa o número de avarias.

b) Calcule

b1. $P(X \geq 1)$ b2. $P(1 < X \leq 3)$ b3. $P(X > 3|X \geq 1)$

b4. $P(X < 2{,}5|X \geq 0)$.

CAPÍTULO 2(3) – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

- Ex.6 Seja X uma v.a. discreta com f.d.:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < -1) \\ 0{,}2 & (-1 \leq x < 0) \\ 0{,}7 & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (x \geq 1) \end{cases}$$

a)Determine a função probabilidade de X.

b)Calcule $P(X \geq 1)$.

c)Calcule $P(X < 0{,}5 | X \geq 0)$.

• Variável aleatória contínua

Definição 3.5 – Função densidade de probabilidade
À função $f_X(x)$*, não negativa, chama-se função densidade de probabilidade* ou, simplesmente, função densidade.

Notas:

- Sabe-se que $P(X \in \mathfrak{R}) = 1$ e que $P[X \in (-\infty\,, x]] = F_X(x), \forall\, x \in \mathfrak{R}$

Dado $\Delta x > 0$, $P(X \in (x, x + \Delta x]) = F(x + \Delta x) - F(x)$

Então, a quantidade média de probabilidade no intervalo $(x, x + \Delta x] = \dfrac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$

a densidade de probabilidade no ponto x, $f(x)$ $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$

Nos pontos onde não existe $F'(x)$ *convenciona-se que* $f(x) = 0$

CAPÍTULO 2(3) – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

- Notas:

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

2. $P(B) = P(X \in B) = \int_B f(x)dx$

$$B = (a, b], P(B) = P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

3. $\forall\, x \in \Re, P(X = x) = 0 \Rightarrow$

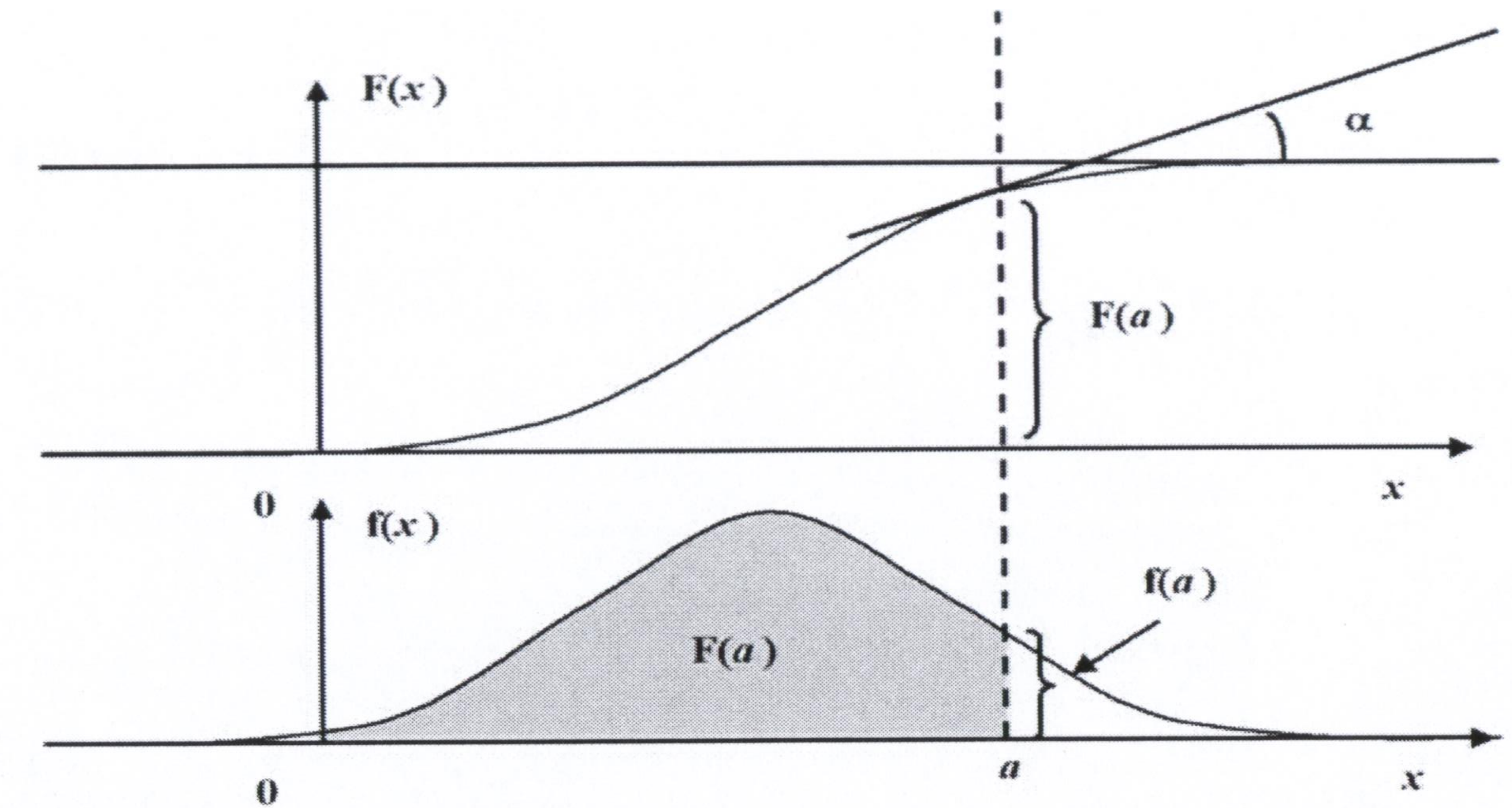
$$P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b)$$

4. **É indiferente representar uma variável aleatória contínua com a respectiva função de distribuição ou densidade.**

5. A função de densidade **pode assumir valores superiores a 1** (**não é uma probabilidade).**

CAPÍTULO 2(3) – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

Função densidade e distribuição de uma v.a. contínua



CAPÍTULO 2(3) – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

- **Exemplo 3.8 – Seja X*: vida útil (103 h), de um componente electrónico.***

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} \theta e^{-\theta x} dx = 1 - e^{-\theta x}, x > 0,\ \theta > 0$$

θ *caracteriza a qualidade do* componente ($\theta = 0.03$).

Pretende determinar-se a probabilidade de um componente escolhido ao acaso:

a) durar menos de 20 mil horas:

$$P(X < 20) = F(20) = 1 - e^{-0.03\times 20} \approx 0.45;$$

b) dure entre 30 mil e 50 mil horas:

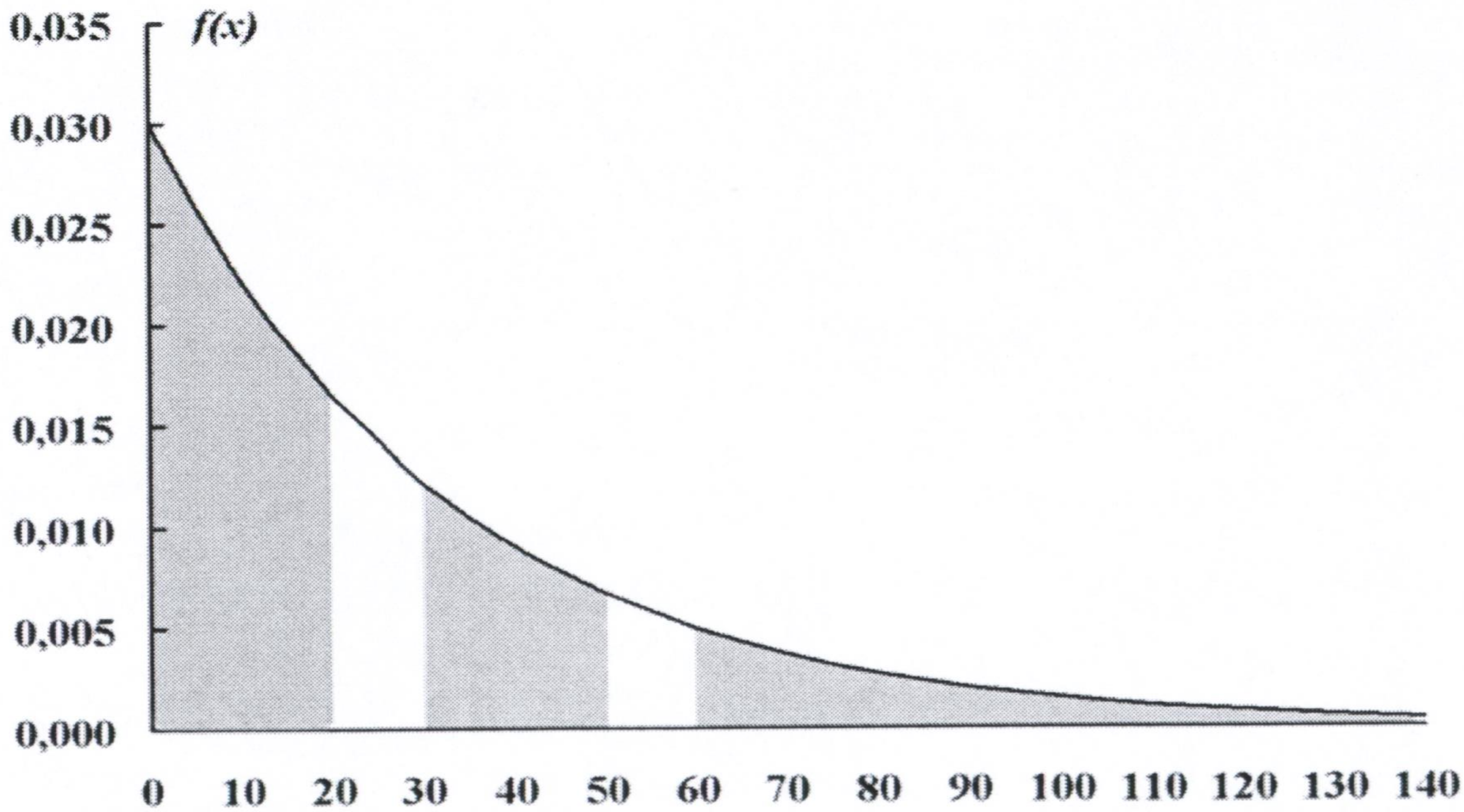
$$P(30 < X < 50) = F(50) - F(30) = e^{-0.03\times 30} - e^{-0.03\times 50} \approx 0.18$$

c) dure mais de 60 mil horas:

$$P(X > 60) = 1 - F(60) = e^{-0.03\times 60} \approx 0{,}17$$

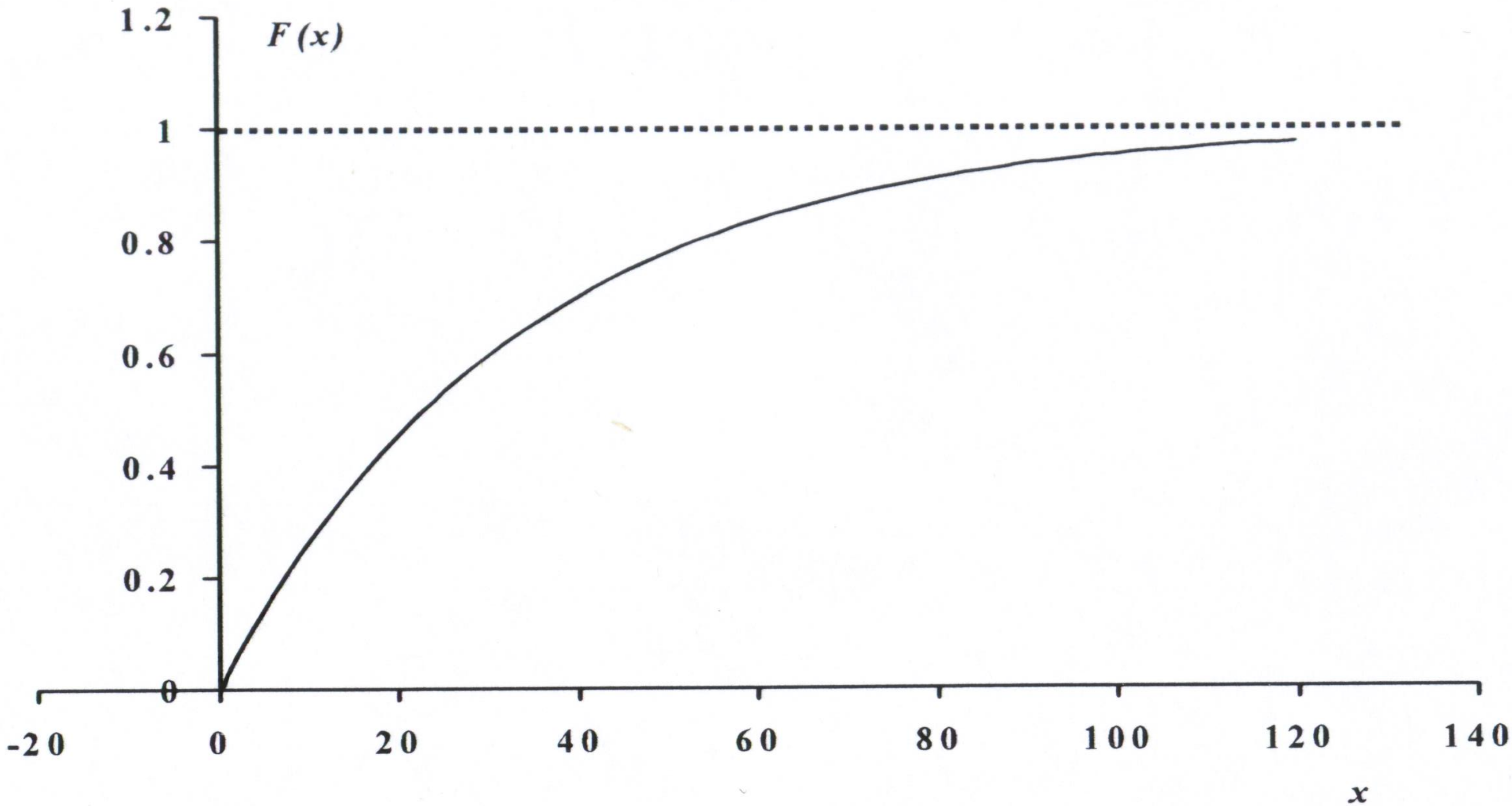
CAPÍTULO 2(3) – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

Função densidade para a vida útil de um componente electrónico



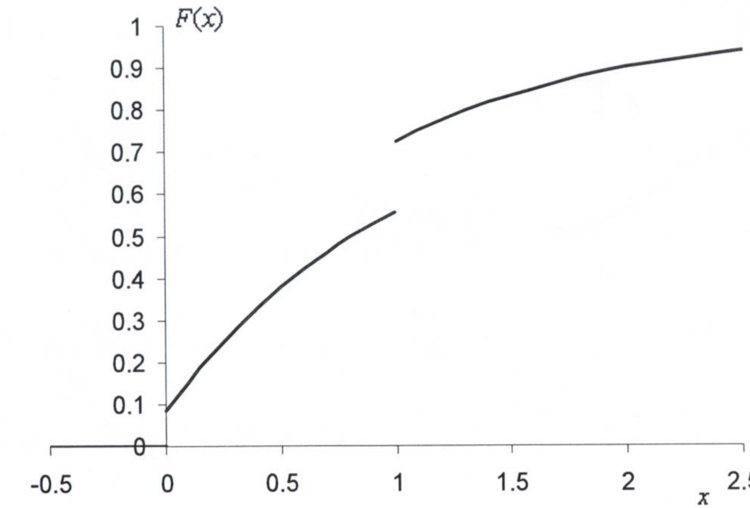
CAPÍTULO 2(3) – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

Função distribuição para a vida útil de um componente electrónico



CAPÍTULO 2(3) – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

- **Exemplo 3.9 : Variáveis aleatórias mistas: Combinam as 2 situações anteriores**



$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{1}{12} + \dfrac{3}{4}(1 - e^{-x}) & 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}(1 - e^{-x}) & x \geq 1 \end{cases}$$

$$P(X = 0) = F(0) - F(0 - 0) = 1/12$$

$$P(X = 1) = F(1) - F(1 - 0) = 2/12$$

$$\boxed{x = 0 \text{ e } x = 1 \qquad D_X = \{0, 1\} \neq \emptyset, \sum_{x \in D_X} P(X = x) < 1}$$

$$P(0.5 < X < 1) = F(1 - 0) - F(0.5) = {}^{3}/_{4}\,(e^{-0.5} - e^{-1})$$

$$P(0.5 < X < 2) = F(2) - F(0.5) = \frac{2}{12} + {}^{3}/_{4}\,(e^{-0.5} - e^{-2})$$

3.4 - Funções de uma variável aleatória

Tem-se a v.a. X , *conhece-se* $F_X(x)$*;*

Pretende-se a distribuição da variável aleatória Y.

$Y = \psi(X)$ ψ é uma função real de variável real;

Y *é uma variável aleatória que assume o valor* $y = \psi(x)$ *quando* $X = x$*.*

Função distribuição $- F_Y(y)$?

O processo de mudança de variável permite obter $F_Y(y)$ *a partir de* $F_X(x)$*.*

1. X *variável aleatória discreta.*

x:	-2	-1	0	1	2
$f(x)$:	$12/60$	$15/60$	$10/60$	$6/60$	$17/60$

$$Y = \psi(X) = X^2$$

- Determinar a f. p. de Y, $f_Y(y)$ *a partir de* $f_X(x)$.

- $D_X = \{x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots\}$ *o conjunto de pontos de descontinuidade de* $F_X(x)$ *tais que* $f_X(x) > 0$.

$$D_X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

- $D_Y = \psi(D_X)$ *é o conjunto de pontos de descontinuidade de* $F_Y(y)$ *tais que* $f_Y(y) > 0$.

$$D_Y = \{0, 1, 4\}$$

CAPÍTULO 2(3) – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

x:	-2	-1	0	1	2
$f(x)$:	$12/60$	$15/60$	$10/60$	$6/60$	$17/60$

- Dado $y \in D_Y$, *seja* $A_y = \{x: \varphi(x) = y, x \in D_X\}$

$$y = 0 \Rightarrow A_0 = \{x: \varphi(x) = 0\} = \{0\}$$

$$y = 1 \Rightarrow A_1 = \{x: \varphi(x) = 1\} = \{-1, 1\}$$

$$y = 4 \Rightarrow A_4 = \{x: \varphi(x) = 4\} = \{-2, 2\}$$

- A função probabilidade de Y *vem dada por:*

$$f_Y(y) = P(Y = y) = P\left(X \in A_y\right) = \sum_{x_i \in A_y} f(x_i) \quad (3.12)$$

$$f_Y(0) = P(Y = 0) = P(X \in A_0) = f_X(0) = 10/60$$

$$f_Y(1) = P(Y = 1) = P(X \in A_1) = f_X(-1) + f_X(1) = 21/60$$

$$f_Y(4) = P(Y = 4) = P(X \in A_4) = f_X(-2) + f_X(2) = 29/60$$

- $Y = \psi(X)$ *também é discreta.*

2. Caso Geral: X *é uma **variável aleatória qualquer***

O processo de mudança de variável assenta na igualdade,

$$\boldsymbol{F_Y(y) = P(Y \le y) = P\left(X \in A_y^*\right)} \text{ com } A_y^* = \{x: \psi(x) \le y\}$$

Exemplo 3.12 – Supondo que a variável aleatória contínua X *tem função de distribuição* $F_X(x)$ *vão determinar-se as funções de distribuição* $F_Y(y)$ *de:*

a) $Y = |X| \Rightarrow \boldsymbol{F_Y(y) = P(|X| \le y) = P(-y \le X \le y) = F_X(y) - F_X(-y)}$

b) $Y = aX + b \Rightarrow \boldsymbol{F_Y(y) = P(aX + b \le y) =}$

$$\boldsymbol{= P(X \le (y-b)/a) = F_X[(y-b)/a] (a > 0)}$$

$$\boldsymbol{= P(X \ge (y-b)/a) = 1 - F_X[(y-b)/a]\ (a < 0)}$$

c) $\boldsymbol{F_Y(y) = P\left(X^2 \le y\right) = P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) =}$

$$\boldsymbol{= \begin{cases} 0 & (y < 0) \\ F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) & (y \ge 0) \end{cases}}$$

CAPÍTULO 2(3) – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

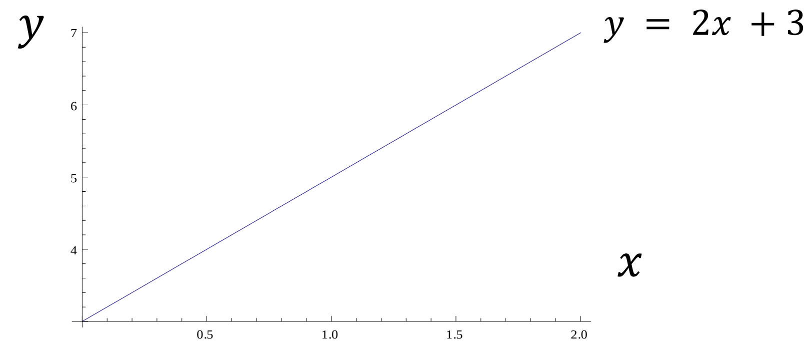
Nota: Mesmo quando X *é variável aleatória continua e* $\boldsymbol{\psi(X)}$ *é função contínua pode* suceder que Y *não seja contínua. Tem-se na generalidade:*

X	$Y=\psi(X)$
Discreta	Discreta
Contínua	Contínua Mista Discreta
Mista	Discreta Mista

CAPÍTULO 2(3) – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

Seja a v.a. $Y = 2X + 3$. X é v.a. com função distribuição:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^2/2 & 0 < x \leq 1 \\ 2x - x^2/2 - 1 & 1 < x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$



A função distribuição da v.a. Y pode obter-se a partir da função distribuição da v.a. X, fazendo:

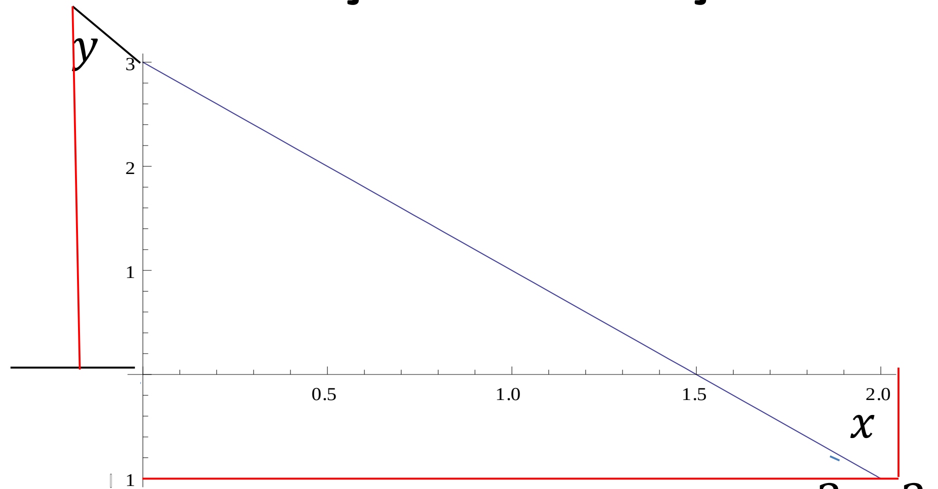
$$F(y) = P(Y \leq y) = P(2X + 3 \leq y) = P\left(X \leq \frac{y-3}{2}\right) = F_X\left(\frac{y-3}{2}\right)$$

x	x≤ 0	0≤x<1	1≤x<2	x≥ 2
y	y≤ 3	3≤y<5	5≤y<7	y≥ 7

$$F(y) = \begin{cases} 0 & y < 3 \\ \dfrac{\left(\dfrac{y-3}{2}\right)^2}{2} & 3 \leq y < 5 \\ 2\dfrac{y-3}{2} - \dfrac{\left(\dfrac{y-3}{2}\right)^2}{2} - 1 & 5 \leq y < 7 \\ 1 & y \geq 7 \end{cases}$$

CAPÍTULO 2(3) – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

- Seja a v.a. $Y = 3 - 2X$



$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ {x^2}/{2} & 0 < x \leq 1 \\ 2x - {x^2}/{2} - 1 & 1 < x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

A função distribuição da v.a. Y pode obter-se a partir da função distribuição da v.a. X, fazendo:

$$F(y) = P(Y \leq y) = P(3 - 2X \leq y) = P\left(X \geq \frac{3-y}{2}\right) = 1 - F\left(\frac{3-y}{2}\right)$$

x	x≤ 0	0≤x<1	1≤x<2	x≥ 2
y	y≥ 3	1≤y<3	-1≤y<1	y< −1

$$F(y) = \begin{cases} 0 & y < -1 \\ 1 - \left[2\dfrac{3-y}{2} - \dfrac{\left(\dfrac{3-y}{2}\right)^2}{2} - 1\right] & -1 \leq y < 1 \\ 1 - \dfrac{\left(\dfrac{3-y}{2}\right)^2}{2} & 1 \leq y < 3 \\ 1 & y \geq 3 \end{cases}$$

Exemplo 3.13 – Seja a variável aleatória X *com função densidade*

$$\boldsymbol{F_X(x)} = \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{1}{2} & -1 < x < 1 \\ 0 & outros\ x \end{cases}$$

$$\textbf{1. } Y = \psi(X) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ X & X \geq 0 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \dfrac{y}{2} + \dfrac{1}{2} & 0 \leq y < 1 \\ 1 & y \geq 1 \end{cases}$$

Existe um ponto de descontinuidade, $y = 0$ *com* $0 < P(Y = 0) = 1/2 < 1$

Y é uma variável aleatória mista

$$\textbf{2. W} = \psi(X) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ 1 & X \geq 0 \end{cases}$$

$w = 0 \Rightarrow A_0 = \{x: \psi(x) = 0\} = \{x < 0\}$

$$f_W(w) = P(X < 0) = 1/2$$

$w = 1 \Rightarrow A_1 = \{x: \psi(x) = 1\} = \{x \geq 0\}$

$$f_W(w) = P(X \geq 0) = 1/2$$

w	0	1
$f_W(w)$	$1/2$	$1/2$

$$\boldsymbol{F_W(w)} = \begin{cases} 0 & w < 0 \\ 1/2 & 0 \leq w < 1 \\ 1 & w \geq 1 \end{cases}$$

CAPÍTULO 2(3) – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

Seja $Y = \Psi(X)$ com X v.a. contínua e Ψ uma função real de variável real com domínio em $A = \{x: f_X(x) > 0\}$

Para garantir que a v.a. $Y = \Psi(X)$ também é contínua

Condição suficiente:
Ψ tenha derivada não nula e seja estritamente monótona em todos os pontos do seu domínio $A = \{x: f_X(x) > 0\}$

CAPÍTULO 2(3) – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

- **Exemplo: Seja a variável aleatória $\boldsymbol{Y}$** com função distribuição

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \dfrac{y}{2} + \dfrac{1}{2} & 0 \leq y < 1 \\ 1 & y \geq 1 \end{cases} \qquad \boldsymbol{W} = \psi(\boldsymbol{Y}) = \begin{cases} \mathbf{0} & \boldsymbol{y} < \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \leq \boldsymbol{y} < \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \\ \mathbf{2} & \boldsymbol{y} \geq \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \end{cases}$$

A função probabilidade de $\boldsymbol{W}$ é:

$$w = 0 \Rightarrow A_0 = \{y: \psi(y) = 0\} = \{y: y \leq 0\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(W = 0) = P(Y \leq 0) = F_Y(0) = 1/2$$

$$w = 1 \Rightarrow A_1 = \{y: \psi(y) = 1\} = \{y: 0 < y \leq 1/2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(W = 1) = P(0 < Y \leq 1/2) = F_Y(1/2) - F_Y(0) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}$$

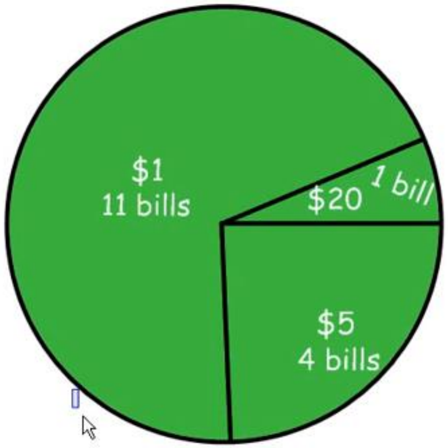
$$w = 2 \Rightarrow A_2 = \{y: \psi(y) = 2\} = \{y: y > 1/2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(W = 2) = P(Y > 1/2) = 1 - P(Y \leq 1/2) = 1 - F_Y(1/2)$$

CAPÍTULO 2(3) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

12.4 Random Variables and Expected Value

Suppose your wallet contains eleven $1 bills, four $5 bills, and one $20 bill. Immagine that you reach into your wallet and remove a bill at random, and then replace it. If you were to do this many times, what is the average value of the bill you remove?



Extend Page


nano shoots video.
Now with video camera,
larger screen, and FM radio
with Live Pause.


AppleCare
Protection Plan

Extend Page

CAPÍTULO 2(3) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

Definição 3.6 – Valor esperado de uma variável aleatória discreta

Se X *é uma variável aleatória discreta com função probabilidade* $f\ (x)$, *a expressão,*

$$E(X) = \sum_{x \in D_X} x.\, f_X(x)$$

, (3.14)

quando, $\sum_{x \in D_X} |x|.\, f_X(x) < +\infty$ *(3.15), define o valor esperado, média ou esperança matemática* de X.

Notação: $E(X) = \mu_X = \mu$

CAPÍTULO 2(3) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

Ex.3: Um investidor estuda três estratégias para investimento de 1000 euros.

Estratégia 1	**10000**	**-1000**		**Rend. médio**
	0,15	0,85		650
Estratégia 2	**1000**	**500**	**-500**	
	0,5	0,3	0,2	550
Estratégia 3	Rendimento certo de 400			400

Qual a estratégia que escolheria e como justificaria a escolha feita?

$$E(Estr.1) = 10000 * 0.15 + (-1000 * 0.85) = 650$$

$$E(Estr.2) = 1000 * 0.5 + 500 * 0.3 + (-500 * 0.2) = 550$$

$$E(Estr.3) = 400 * 1 = 400$$

CAPÍTULO 2(3) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

Comentários:

• Se o conjunto D_X *é finito, (3.15) verifica-se sempre e existe valor esperado;*

• Se o conjunto D_X *é **infinito (numerável)**, o valor esperado é dado pela soma de uma série e **só existe** se a* série for absolutamente convergente.

• O valor esperado de uma variável aleatória discreta corresponde, muitas vezes, a um ponto que **não pertence a D_X.**

Exemplo 3.15 – Se X *é a variável aleatória que representa o número de pontos obtido* com o lançamento de um dado regular, então

$$\boldsymbol{E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6}}$$
$$\boldsymbol{= 3.5} \notin D_X$$

CAPÍTULO 2(3) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

Variáveis Aleatórias Contínuas

Função densidade de probabilidade

Seja X *uma variável aleatória contínua:*

existe uma função real de variável real, $f(x) \geq 0$

Definição 3.7 – Valor esperado de uma variável aleatória contínua

Se X *é variável aleatória contínua com função densidade* $f_X(x)$ *a expressão,*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x . f_X(x)\, dx \quad \textit{(3.17)}$$

quando, $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| . f(x)\, dx < \infty$ *(3.18)*

define o *valor esperado, média ou esperança matemática* de X.

CAPÍTULO 2(3) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

- **Interpretação do conceito de valor esperado (ponto de vista frequencista):**

  Se a experiência aleatória, em cada realização da qual se observa x, *for repetida um* grande número de vezes, a média aritmética dos valores obtidos está, quase certamente, "muito próxima" de $E(X)$.

- *O valor esperado de uma variável aleatória contínua pode não existir se a condição (3.18) não se verificar, i.é, se o integral for divergente.*

CAPÍTULO 2(3) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

Exemplo 3.16 – O valor esperado da variável aleatória X, *com função densidade*

$$\boldsymbol{f_X(x) = 3x^{-4} \qquad (x > 1)}$$

é dado por:

$$\boldsymbol{E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.\,3x^{-4}dx = \int_{1}^{+\infty} 3x^{-3}dx = 3\,\frac{x^{-2}}{-2}\Bigg]_{1}^{+\infty}}$$

$$\boldsymbol{= 3\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{-2x^2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}}$$

Exemplo – Cap.2 -Ex.1

Seja a variável aleatória X, *com função densidade*

$$f_X(x) = \begin{cases} x & (0 < x < 1) \\ 1/2 & (1 < x < 2) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.\,f_X(x)dx = \int_0^1 x * x dx + \int_1^2 x * \frac{1}{2}dx = \frac{5}{6}}$$

CAPÍTULO 2(3) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

Definição 3.8 – Valor esperado de uma função de variável aleatória discreta

Se X *é uma variável aleatória discreta com função probabilidade* $f\ (x)$*, a expressão,*

$$E[\psi(X)] = \sum_{x \in D_X} \psi(X).\, f_X(x)$$

é o valor esperado de $\psi(X)$*, impondo-se uma condição semelhante a (3.19).*

- A **existência de $E(X)$ *não implica a existência de* $E[\psi(X)]$*, e inversamente.***

- É indiferente calcular $E[\psi(X)]$ *pela definição 3.19 ou proceder à* mudança de variável $\mathrm{Y} = \psi(X)$ *e calcular* $E(Y)$ *recorrendo à definição 3.14.*

CAPÍTULO 2(3) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

Ex1. Uma empresa rodoviária municipal iniciou operações numa nova rota. Registos do passado permitiram construir a distribuição de probabilidade do número de utentes nessa rota em cada dia da semana. Sabe-se também que cada utente paga 1.5 euros e o custo de manutenção da rota é de 34 euros por dia. É lhe pedido que avalie se vale a pena manter esta rota. Que tipo de informação estatística acha que deveria fornecer para fundamentar a sua opinião.

CAPÍTULO 2(3) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

Ex1. X- v.a. que representa o número de utentes por dia

Distribuição de probabilidades

Nºutentes	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**
$f_X(x)$	0,02	0,12	0,23	0,31	0,19	0,08	0,03	0,02

Número médio de utentes por dia: $E(X) = \sum_{x=20}^{27} x.\, f_X(x)$

$\boldsymbol{x} \times f_X(x)$	0,4	2,52	5,06	7,13	4,56	2	0,78	0,54	22,99

$Lucro = \underbrace{1{,}5X - 34}_{\Psi(X)} \Rightarrow E(Lucro)$=$\sum_{x=20}^{27} (1{,}5x - 34).\, f_X(x)$

$Lucro$	-4	-2,5	-1	0,5	2	3,5	5	6,5	$E(L)$
$Lucro \times f_X(x)$	-0,08	-0,3	-0,23	0,155	0,38	0,28	0,15	0,13	0,485

CAPÍTULO 2(3) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

Ex2. O gerente de uma fábrica está a considerar substituir uma das suas máquinas. Registos passados permitem construir a seguinte função de probabilidade para o número de avarias da máquina por semana. Estima-se ainda que cada avaria tem para a fábrica um custo de 1500 euros . O que aconselharia o gerente a fazer? Como fundamentaria o seu parecer ao gerente sobre a substituição ou não da máquina?

CAPÍTULO 2(3) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

Ex2. X- v.a. que representa o número de avarias por semana

Nº avarias	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
$f_X(x)$	0,10	0,26	0,42	0,16	0,06

Número médio de avarias/semana: $E(X) = \sum_{x=0}^{4} x.f_X(x)$

$x.f_X(x)$	**0**	**0,26**	**0,84**	**0,48**	**0,24**	**1,82**

Prejuízo semanal$= \Psi(X) = 1500 \times X$

$$Prejuízo\ médio = E(Prej.) = \sum_{x=0}^{4} \underbrace{1500x}_{\Psi(x)}.f_X(x)$$

$Prej.$	**0**	**1500**	**3000**	**4500**	**6000**	
						$E(Prej.)$
$Prej \times f_X(x)$	0	390	1260	720	360	2730

CAPÍTULO 2(3) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

- **Exemplo 3.18 –** Seja a variável aleatória discreta X*, com função probabilidade:*

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{1/3} & (\boldsymbol{x = -1, 0, 1}) \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{outros\ x} \end{cases} \qquad Y = \psi(X) = \boldsymbol{X^2}$$

Pretende-se calcular $E[\varphi(X)]$. 2 vias alternativas

a) $E[\psi(X)] = \sum_{x \in D_X} x^2 . f_X(x) = \mathbf{1} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} + \mathbf{0} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} + \mathbf{1} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$

b) $\boldsymbol{Y} = \psi(X)$ ***com*** $D_Y = \{\mathbf{0, 1}\}$

$A_0 = \{0\} \Rightarrow P(Y = 0) = f_X(0) = \frac{1}{3}$

$A_1 = \{-1{,}1\} \Rightarrow P(Y = 1) = f_X(-1) + f_X(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$$\boldsymbol{f_Y(y)} = \begin{cases} \mathbf{1/3} & (\boldsymbol{y = 0}) \\ \mathbf{2/3} & (\boldsymbol{y = 1}) \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{E(Y)} = \mathbf{0} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} + \mathbf{2} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

CAPÍTULO 2(3) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

- **Dada uma variável aleatória contínua X *é também possível definir valor esperado* de uma função de X, $\psi\ (X)$.**

- ***Note-se que a nova variável aleatória pode não ser* contínua.**

Definição 3.8 – Valor esperado de uma função de variável aleatória contínua

Seja X *é variável aleatória contínua, com função densidade* $f\ (x)$*, e suponha-se que* $\psi\ (X)$ *é ainda uma variável aleatória contínua. A expressão,*

$$E[\psi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(X).f(x)dx \quad (3.20)$$

é o valor esperado de $\psi\ (X)$*, impondo-se naturalmente uma condição semelhante a* (3.15 ou 3.18).

CAPÍTULO 2(3) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

Exemplo 3.19 – O valor esperado da variável aleatória X*, com função densidade e distribuição:*

$$\boldsymbol{f_X(x) = 3x^{-4}} \qquad (\boldsymbol{x > 1}) \qquad\qquad \boldsymbol{e} \qquad\qquad \boldsymbol{F_X(x) = 1 - x^{-3}}$$

Seja $\boldsymbol{Y = \psi(X) = X^2}$

Pretende-se calcular $E(Y) = E[\varphi(X)]$. 2 vias alternativas

$$\textbf{\textit{a)}} E\left[\boldsymbol{X^2}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{x^2.3x^{-4}} dx = \int_1^{+\infty} \boldsymbol{3x^{-2}} dx = 3\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{x^{-2}} dx = \boldsymbol{3}$$

$$\textbf{\textit{b)}} \boldsymbol{F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(X^2 \leq y\right) = F_X(\sqrt{y})} = \begin{cases} 0 & y < 1 \\ \boldsymbol{1 - y^{-3/2}} & y \geq 1 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{f_Y(y) = \frac{3}{2} y^{-5/2}} \qquad (\boldsymbol{y > 1}) \Rightarrow \boldsymbol{E(Y)} = \int_{\boldsymbol{1}}^{+\infty} \boldsymbol{y.\frac{3}{2} y^{-5/2} dy}$$

$$= \int_{\boldsymbol{1}}^{+\infty} \boldsymbol{\frac{3}{2} y^{-3/2}\, dy = 3}$$

CAPÍTULO 2(3) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

Propriedades do valor esperado (seja X *discreta, contínua ou outra):*

1) Se c *é uma constante então,* $E(c) = c$.

2) Se c *é uma constante e se existe* $E[\psi(X)]$ *então,*

$$E[c\psi(X)] = c\,E[\psi(X)]$$

3) Se existirem $\psi_1(X)$ e $\psi_2(X)$ *então,*

$$E[\psi_1(X) + \psi_2(X)] = E[\psi_1(X)] + E[\psi_2(X)]$$

Demonstrações no livro.

Das Propriedades 2 e 3, existindo $E[\psi_j]$, *tem-se:*

$$E\left[\sum_{j=1}^{n} c_j\psi_j(X)\right] = \sum_{j=1}^{n} c_j E\left[\psi_j(X)\right] \quad \textit{(4.6)}$$

CAPÍTULO 2(3) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

Dois resultados importantes:

• Se X *e* Y *são duas variáveis aleatórias (discretas ou contínuas) então,* $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$. *(3.23)*

• Se X *e* Y *são duas variáveis aleatórias* ***independentes*** *então,*

$$E(X.Y) = E(X)E(Y). \quad (3.24)$$

CAPÍTULO 2(3) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

3.6 Momentos

Objectivo → caracterizar uma variável aleatória através de um pequeno número de indicadores capazes de descrever os aspectos mais significativos da distribuição de probabilidade.

Definição 3.9 – Momento de ordem k *em relação à origem*

O valor esperado, $\mu'_k = E\left(X^k\right)$

se existir, é o momento de ordem k $(k = 1,2, \dots)$ *em relação à origem* ou momento ordinário de ordem k *da variável* aleatória X.

Se X é v.a. discreta $\mu'_k = E\left(X^k\right) = \sum_{x \in D_X} x^k . f(x)$ (3.25)

Se X é v.a. contínua $\mu'_k = E\left(X^k\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k . f(x) dx$ (3.26)

CAPÍTULO 2(3) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

Teorema 3.2 – Se existe o momento de ordem k *de uma variável aleatória, então também* existe o momento de ordem s*, com* $s < k$ *, da mesma variável aleatória.*

CAPÍTULO 2(3) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

Momentos mais importantes:

• **1º momento em relação à origem: média ou valor esperado de $\boldsymbol{X}$,**

$$\mu'_1 = E(X^1) = \sum_{x \in D_X} x.f(x)\,, \quad \mu'_1 = E(X^1) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx$$

$\mu'_1 = \mu_X$ (média) **parâmetro de localização da** distribuição de X

• **2º momento em relação à origem** $(k = 2)$***, ou valor esperado do quadrado de*** $\boldsymbol{X}$***,***

$$\mu'_2 = E(X^2) = \sum_{x \in D_X} x^2.f(x)\,, \quad \mu'_2 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2.f(x)dx$$

• A média (centro de gravidade da distribuição) mas há que avaliar a dispersão dos valores em torno da média.

CAPÍTULO 2(3) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

- A dispersão e os momentos em relação à média:

$$\psi(X) = (X - \mu)^k$$

Definição 3.10 – Momento de ordem k *em relação à média*

O valor esperado,

$$E[(X - \mu)^k] \quad k = 1, 2, \cdots$$

se existir, é o momento de ordem k *em relação à média ou momento central de ordem* k *da variável aleatória* X.

Se X é v.a. discreta $E[(X - \mu)^k] = \sum_{x \in D_X} (x - \mu)^k . f(x)$ (3.27)

Se X é v.a. continua $E[(X - \mu)^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^k . f(x) dx$ (3.28)

CAPÍTULO 2(3) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

- O 1º momento em relação à média é sempre nulo → **não tem interesse.**

Constante

$$E[(X-\mu)^1] = E(X) - E(\mu) = \mu - \mu = 0$$

- O **2º momento em relação à média é designado por** **variância e é representado** pelos símbolos :

$$\mu_2 = Var(X) = \sigma_X^2 = \sigma^2$$

Momento central mais importante

Definição 3.11 – Variância

Designa-se por variância de uma variável aleatória X,

$$Var(X) = \sigma_X^2 = E[(X-\mu)^2] \qquad (3.29)$$

se existir o valor esperado.

- Os 3º e 4º momentos também têm a sua importância.

CAPÍTULO 2(3) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

Comentários:

- A variância nunca pode ser negativa, $Var(X) \geq 0$*;*
- $Var(X) = 0$*, só se* X *for variável aleatória degenerada:*

$$P(X = c) = 1;$$

- Para o cálculo da variância pode aproveitar-se a relação

$$Var(X) = E(X^2) - \mu_X^2 \qquad \textit{(3.30)}$$

- A existência da variância implica a existência da média (teorema 4.1)
- A variância é um parâmetro de **dispersão;**

Propriedades da variância:

1) Se c *é uma constante,* $Var(c) = 0$

2) Se c *é uma constante e* X *uma v.a.,*

$$Var(cX) = c^2 Var(X)$$

3) Se c *e* d *são constantes e* X *uma v.a.,*

$$Var(cX + d) = c^2 Var(X)$$

4) Se X *e* Y *são duas variáveis aleatórias* ***independentes então,*** $Var(X \mp Y) = Var(X) + Var(Y)$. *(3.31)*

CAPÍTULO 2(3) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

Ex1. X- v.a. que representa o número de utentes por dia

Distribuição de probabilidades

Nºutentes	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	
$f_X(x)$	0,02	0,12	0,23	0,31	0,19	0,08	0,03	0,02	
$x * f_X(x)$	0,4	2,52	5,06	7,13	4,56	2	0,78	0,54	22,99
$(x-\mu_X)^2 * f_X(x)$	8,96	4,08	1,21	0,31	1,21	4,12	9,09	16,1	45,08

número médio de utentes por dia: $E(X) = \sum_{x=20}^{27} x.\, f_X(x) = 22{,}99$

Variância do número de utentes por dia:

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{x=20}^{27} (x-\mu_X)^2.\, f_X(x) = \sum_{x=20}^{27} (x-22{,}99)^2.\, f_X(x) = 45{,}08$$

Variância do Lucro

$$\mathrm{Var}(L) = \sum_{x=20}^{27} (l-\mu_L)^2.\, f_X(x) = \sum_{x=20}^{27} (l-0{,}485)^2.\, f_X(x)$$

$$= Var(1{,}5X-34) = Var(1{,}5X) = 1{,}5^2 Var(X) = 1{,}5^2 \times 45{,}08 = 101{,}43$$

CAPÍTULO 2(3) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

Cálculo da variância – X variável aleatória discreta

$$f(x) = \begin{cases} 1/3 & (x = -1, 0, 1) \\ 0 & outros\ x \end{cases}$$

$$E(X) = \mu = \sum_{-1}^{1} x.f_X(x) = 0$$

$$E(X^2) = \sum_{-1}^{1} x^2.f_X(x) = \frac{2}{3}$$

$$Var(X) = \sum_{x \in D_X} (x-\mu)^2.f(x) = (-1-0)^2.\frac{1}{3} + (0-0)^2.\frac{1}{3} + (1-0)^2.\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$Var(X) = E(X^2) - \mu_X^2 = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}$$

Cálculo da variância – X variável aleatória contínua

$$\boldsymbol{f_X(x) = 3x^{-4} \qquad (x > 1)}$$

$E(X) = \frac{3}{2}$ e $E(X^2) = 3 \Rightarrow Var(X) = E(X^2) - \mu_X^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2] = \int_1^{+\infty} \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 .3x^{-4}dx = \frac{3}{4}$$

CAPÍTULO 2(3) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

Definição 3.12 – Desvio-padrão

Ao valor positivo da raiz quadrada da variância,

$$\sigma_X = +\sqrt{Var(X)} \quad \textit{(3.32)}$$

chama-se desvio padrão da variável aleatória *X*.

Porque o desvio-padrão é medido na unidade da variável, usa-se frequentemente o coeficiente de variação que não depende da unidade de medida da variável (facilita comparações):

Definição 3.13 – Coeficiente de variação

O coeficiente de variação da variável aleatória X *é igual, se existir, ao quociente entre* o desvio-padrão e a média,

$$CV(X) = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \qquad (3.33)$$

CAPÍTULO 2(3) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

Para além da localização e dispersão é conveniente conhecer a forma como a distribuição se comporta em torno da média. Para tal calcula-se o coeficiente de assimetria:

Definição 3.14 – Coeficiente de assimetria

O quociente,

$$\gamma_1 = \frac{E[(X-\mu)^3]}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \qquad (3.34)$$

se existir, é designado por coeficiente de assimetria da variável aleatória X.

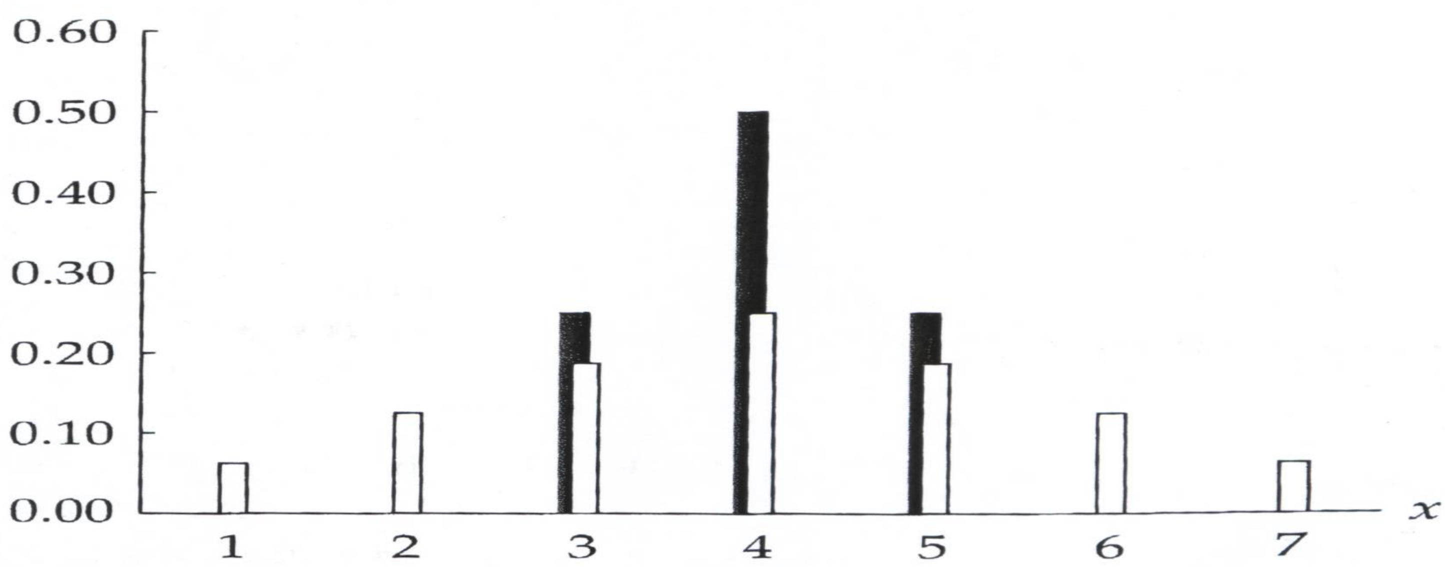
Simetria da distribuição de X *em relação à média,* implica que **todos os momentos centrais de ordem impar ,que existirem ,**sejam nulos;

CAPÍTULO 2(3) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

Sejam as v.a.(s) X e Y com f. probabilidade:

$$f_X(x) = \frac{2 - |x - 4|}{4} \quad (x = 3,4,5) \Rightarrow \mu_X = 4; \sigma_X^2 = 0.5; \gamma_1 = 0$$

$$f_Y(y) = \frac{4 - |y - 4|}{16} \quad (x = 1,2,3,4,5,6,7) \Rightarrow \mu_Y = 4; \sigma_Y^2 = 2.5; \gamma_1 = 0$$

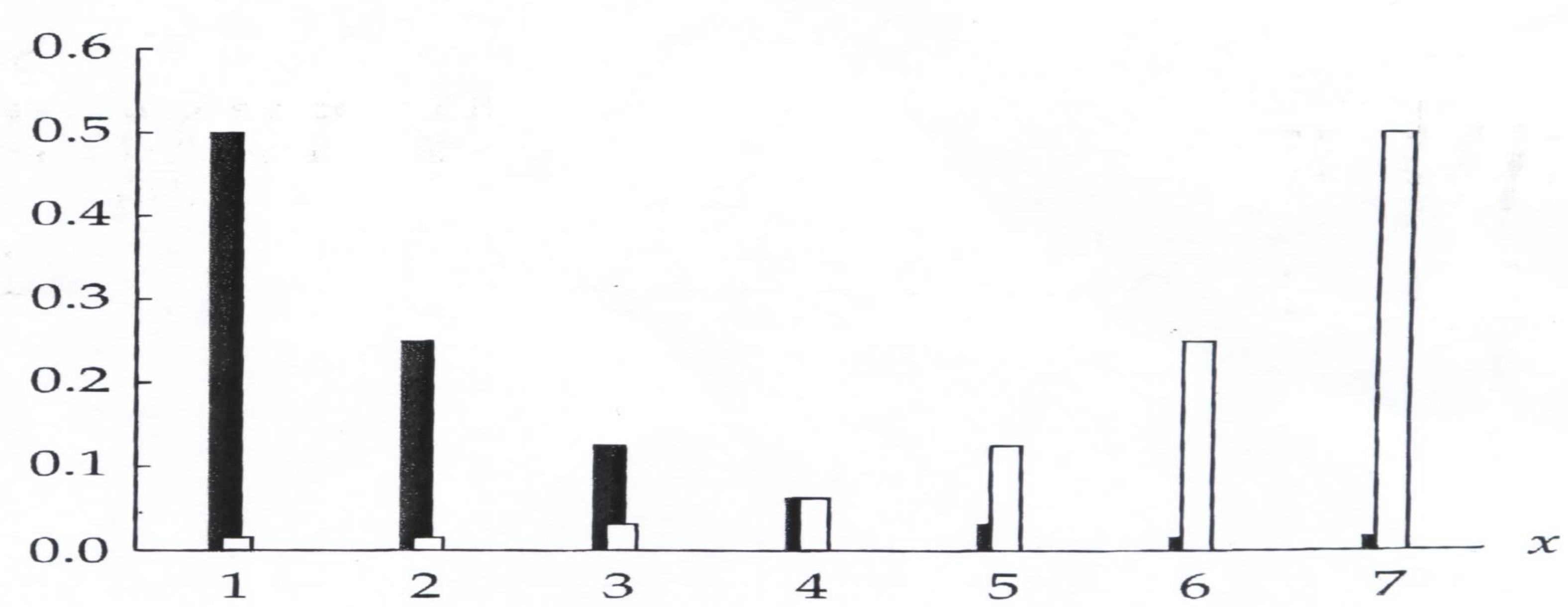


CAPÍTULO 2(3) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

Sejam as v.a.(s) X e Y com f. probabilidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2^{6-x}/64 & (x = 1, 2, \cdots, 6) \\ 1/64 & (x = 7) \end{cases} \Rightarrow \mu_X = 1{,}98;\ \sigma_X^2 = 1{,}79;\ \gamma_1 = 1{,}66$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1/64 & (y = 1) \\ 2^{y-2}/64 & (y = 2, 3, \cdots, 7) \end{cases} \Rightarrow \mu_Y = 6{,}02;\ \sigma_Y^2 = 1{,}79;\ \gamma_1 = -1{,}66$$



CAPÍTULO 2(3) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

A *kurtosis mede a “espessura” das “caudas” da distribuição ou, de forma equivalente,* o “achatamento” da função densidade na zona central da distribuição.

Definição 3.15 – Coeficiente de excesso ou *kurtosis*

O coeficiente de excesso ou *kurtosis de uma variável aleatória X, se existir, é definido* por,

$$\gamma_2 = \frac{E[(X-\mu)^4]}{\sigma^4} = \frac{\mu_4}{\sigma^4} \qquad (3.35)$$

A definição é válida para v.a.’s discretas e contínuas mas o seu interesse para as discretas é limitado.

3.7 Parâmetros de ordem. Variáveis Aleatórias Contínuas

Em muitos casos, nomeadamente quando uma distribuição não possui momentos, recorre-se, para proceder à sua caracterização parcial, aos **parâmetros de ordem.**

- Os parâmetros de ordem também podem definir-se para as distribuições discretas mas, nesse caso, têm muito menor importância;
- Os parâmetros de ordem apresentam virtudes próprias que lhes permitem concorrer com os momentos;
- Os parâmetros de ordem são funções de quantis particulares;

CAPÍTULO 2(3) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

Definição 3.16 – Quantil

Seja X *uma variável aleatória contínua e* α *um número real a verificar* $0 < \alpha < 1$. Quantil de ordem α , ϵ_α, é um valor de X *que satisfaz a condição,*

$$\int_{-\infty}^{\varepsilon_\alpha} f_X(x)dx = \alpha \Leftrightarrow F_X(\varepsilon_\alpha) = \alpha \quad (3.36)$$

Notas:

1. Quando a equação 5.8 tem mais do que uma solução, convenciona-se que o quantil de ordem *α é o menor dos valores obtidos.*
2. *O quantil 0.5 é a* ***Mediana da distribuição da v.a. X** (* μ_e *) –* *é uma medida de localização.*
3. *Quando a distribuição é simétrica a mediana=média.*
4. *Amplitude Inter Quartis (AIQ) – medida de dispersão*

Decis ($\alpha = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$) e percentis ($\alpha = 0.01, 0.02, \dots, 0.99$);

CAPÍTULO 2(3) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

Seja X v.a. Com função densidade: $f_X(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 1/2 & 1 < x < 2 \end{cases}$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^2/2 & 0 < x < 1 \\ x/2 & 1 < x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

Mediana -

$$\epsilon_{0,5}: P\left(X \leq \epsilon_{0,5}\right) = 1/2 \Leftrightarrow F\left(\epsilon_{0,5}\right) = \frac{\epsilon_{0.5}^2}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \epsilon_{0,5} = 1$$

1º Quartil -

$$\epsilon_{0,25}: P\left(X \leq \epsilon_{0,25}\right) = 1/4 \Leftrightarrow F\left(\epsilon_{0,25}\right) = \frac{\epsilon_{0.25}^2}{2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \epsilon_{0,25} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

3º Quartil –

$$\epsilon_{0,75}: P\left(X \leq \epsilon_{0,75}\right) = 3/4 \Leftrightarrow F\left(\epsilon_{0,75}\right) = \frac{\epsilon_{0,75}}{2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \epsilon_{0,75} = \frac{3}{2}$$

$$AIQ = \epsilon_{0,75}\text{-}\epsilon_{0,25} = \frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3-\sqrt{2}}{2}$$

CAPÍTULO 2(3) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

- **Moda (não é um parâmetro de ordem) - medida de localização**

  Para v.a. contínuas, a moda corresponde ao ponto do domínio que maximiza a função densidade, o qual pode não ser único. Pode ser aplicado a v.a. discretas. No caso de distribuições simétricas unimodais, a média, a mediana e a moda são iguais.

Definição 3.17 - Moda

Seja X *uma variável aleatória contínua. Moda,* μ_* *, é um valor de* X *que verifica a condição,*

$$f(x) \leq f(\mu_*) \qquad (3.38)$$

qualquer que seja x *pertencente ao domínio da função densidade.*

CAPÍTULO 2(3) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

3.8 Função geradora dos momentos

Seja X*, uma v.a. discreta ou contínua com f.p. ou f.d.p.* $f\ (x)$.

Definição 3.18 – Função geradora dos momentos – v.a. discreta

Seja X *uma variável aleatória discreta com função probabilidade* $f(x)$*. Se existir um* número real $s_0 > 0$ *tal que,*

$$E(e^{sx}) = \sum_{x \epsilon D_X} e^{sx}. f_X(x) \text{ (4.20)}$$

existe para $-s_0 < s < s_0$, *então* $M(s) = E(e^{sx})$ *(4.21)* é a função geradora dos momentos de X.

Definição 5.9 – Função geradora dos momentos – v.a. contínua

Seja X *uma variável aleatória discreta com função probabilidade* $f(x)$*. Se existir um* número real $s_0 > 0$ *tal que,*

$$E(e^{sx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx}. f_X(x) dx \text{ (5.14)}$$

existe para $s_0 < s < s_0$, então $M(s) = E(e^{sx})$ *(5.13)* é a função geradora dos momentos de X.

CAPÍTULO 2(3) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

3.8 Função geradora dos momentos

Seja X*, uma v.a. discreta ou contínua com f.p. ou f.d.p.* $f\ (x)$*.*

Definição 4.10 – Função geradora dos momentos – v.a. discreta

Seja X *uma variável aleatória discreta com função probabilidade* $f(x)$*. Se existir um* número real $s_0 > 0$ *tal que,*

$$E(e^{sx}) = \sum_{x \epsilon D_X} e^{sx}.f_X(x) \text{ (4.20)}$$

existe para $-s_0 < s < s_0$, *então* $M(s) = E(e^{sx})$ *(4.21)* é a função geradora dos momentos de X*.*

Definição 5.9 – Função geradora dos momentos – v.a. contínua

Seja X *uma variável aleatória discreta com função probabilidade* $f(x)$*. Se existir um* número real $s_0 > 0$ *tal que,*

$$E(e^{sx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx}.f_X(x)dx \text{ (5.14)}$$

existe para $s_0 < s < s_0$, então $M(s) = E(e^{sx})$ *(5.13)* é a função geradora dos momentos de X*.*

CAPÍTULO 2(3) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

- A f.g.m. nem sempre existe
- No caso discreto, se D *é finito então a f.g.m. existe sempre;*
- A função geradora dos momentos é função de s *e não de* X*;*
- A existência da função geradora dos momentos implica a existência de momentos de qualquer ordem; O inverso não é verdadeiro.
- Uma distribuição que não tem momentos – ou não tem momentos a partir de certa ordem – não tem função geradora dos momentos.
- A função geradora dos momentos permite calcular os momentos.
- Há uma correspondência biunívoca entre função geradora dos momentos (quando existe) e a distribuição.
- A função geradora de momentos da soma de variáveis aleatórias contínuas independentes é o produto das respectivas funções geradoras.

CAPÍTULO 2(3) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

Cálculo dos momentos com base na função geradora dos momentos

- Ideia base → Derivar a f.g.m. e tomar o valor no ponto *s = 0*
- Caso discreto: $M(s) = E(e^{sx}) = \sum_{x \in D_X} e^{sx}.f_X(x)$ logo

$$M'(s) = \sum_{x \in D_X} xe^{sx}.f_X(x) \Rightarrow M'(0) = \sum_{x \in D_X} x\,e^{0x} f_X(x) = E(X)$$

$$M''(s) = \sum_{x \in D_X} x^2 e^{sx}.f_X(x) \Rightarrow M''(0) = \sum_{x \in D_X} x^2\,e^{0x} f_X(x) = E(X^2)$$

...

Em geral,

$$M^{(r)}(s) = \sum_{x \in D_X} x^r e^{sx}.f_X(x) \Rightarrow M^{(r)}(0) = \sum_{x \in D_X} x^r\,e^{0x} f_X(x) = E(X^r)$$

CAPÍTULO 2(3) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

Exemplo 4.9 – (adaptado) Seja X *a variável aleatória com função probabilidade* $f(x) = p(1-p)^{x-1}, x = 1,2,\cdots \ ,(0 < p < 1)$*, então a f.g.m. é:*

$$M(s) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{sx}.p(1-p)^{x-1} = \frac{pe^s}{1-e^s(1-p)} \qquad s < -ln(1-p)$$

e $$M'(s) = \frac{pe^s}{[1-e^s(1-p)]^2} \Rightarrow M'(0) = E(X) = \frac{1}{p}$$

Exemplo 5.7 – Seja a variável aleatória X *com função densidade,*

$f(x) = \theta e^{-\theta x} \ x > 0 \ \ (\theta > 0)$*, pelo que a f.g.m. é:*

$$M(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx}\,\theta e^{-\theta x} dx = \int_{0}^{+\infty} e^{sx}\,\theta e^{-\theta x} dx = \frac{\theta}{\theta - s}\left[-e^{-(\theta-s)x}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{\theta}{\theta - s} \qquad (s < \theta)$$

$$M'(s) = \frac{\theta}{(\theta-s)^2} \Rightarrow M'(0) = E(X) = \frac{\theta}{\theta^2} = \frac{1}{\theta}$$